



Carl Friedrich GAUSS (1777 – 1855)
Mathématicien allemand.

Dans son ouvrage « Disquisitiones Arithmeticae » (1801), Gauss utilise la notation $a \equiv b [m]$ et développe la théorie des congruences.

Dessin réalisé à l'aide d'une IA.

Exercice 1 [4 points]

Démontrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a : $7 \mid 3^{2n} - 2^n$.

Exercice 2 [5 points]

Déterminer les entiers relatifs n vérifiant le système $\begin{cases} n \mid 2n + 2 \\ n \mid 4n + 1 \end{cases}$.

Exercice 3 [5 points]

Déterminer le chiffre des unités de 7^{2026} .

Exercice 4 [6 points]

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on pose : $a_n = 2n^2 + 14n + 21$ et $b_n = 3n^2 + 15n + 9$.

- Déterminer a_0 et b_0 , justifier que : $a_0 \equiv b_0 [4]$.
- Déterminer a_{10} puis le quotient et le reste de la division euclidienne de a_{10} par 14.
 - Déterminer b_{10} puis le quotient et le reste de la division euclidienne de b_{10} par 14.
A-t-on : $a_{10} \equiv b_{10} [14]$?
- Montrer que, pour tout entier naturel n : $a_n \equiv b_n [n + 4]$.

Bonus

Le midi, une étudiante mange soit un sandwich à 4,2 €, soit un plat chaud avec viande à 16,1 €.

Au bout d'un certain temps, elle présente la facture totale à ses parents pour remboursement : cette facture s'élève à exactement 984,4€.

Son père, qui est mathématicien, effectue quelques rapides calculs puis il s'exclame :
« Ma fille, tu as fait une erreur quelque part ! ».

Expliquer comment il en arrive à une telle conclusion.

Corrigé

Exercice 1

Démontrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a : $7|3^{2n} - 2^n$.

- si $n = 0$, $3^{2(0)} - 2^0 = 3^0 - 2^0 = 1 - 1 = 0$ et $7|0$.
- si $n = 1$, $3^{2(1)} - 2^1 = 3^2 - 2 = 9 - 2 = 7$ et $7|7$.
- si $n = 2$, $3^{2(2)} - 2^2 = 3^4 - 2^2 = 81 - 4 = 77$ et $7|77$.

Soit $n \in \mathbb{N}$.

On a : $9 \equiv 2 \pmod{7}$, autrement dit : $3^2 \equiv 2 \pmod{7}$, donc : $(3^2)^n \equiv 2^n \pmod{7}$,
c'est-à-dire : $3^{2n} \equiv 2^n \pmod{7}$, d'où : $7|3^{2n} - 2^n$.

Conclusion : $\forall n \in \mathbb{N}, 7|3^{2n} - 2^n$.

Exercice 2

Déterminer les entiers relatifs n vérifiant le système $\begin{cases} n|2n+2 \\ n|4n+1 \end{cases}$.

Analyse

$n|2n+2$ et $n|4n+1$ donc n divise toute combinaison linéaire de $2n+2$ et $4n+1$,
en particulier : $n|2(2n+2) - 1(4n+1)$, c'est-à-dire : $n|3$.

Or, les diviseurs de 3 sont : $-3, -1, 1$ et 3 , donc il y a quatre candidats : $-3, -1, 1$ et 3 .

Synthèse

• si $n = -3$ $2n + 2 = -4$ $\text{non}(-3 -4)$ $n = -3$ est <u>refusé</u>	• si $n = -1$ $2n + 2 = 0$ $4n + 1 = -3$ $-1 0$ et $-1 -3$ $n = -1$ est accepté	• si $n = 1$ $2n + 2 = 4$ $4n + 1 = 5$ $1 4$ et $1 5$ $n = 1$ est accepté	• si $n = 3$ $2n + 2 = 8$ $\text{non}(3 8)$ $n = 3$ est <u>refusé</u>
---	---	---	--

Le système de départ admet pour solutions : -1 et 1 .

Exercice 3

Déterminer chiffre des unités de 7^{2026} .

Il s'agit de déterminer le reste modulo 10 de 7^{2026} , c'est-à-dire r tel que : $7^{2026} \equiv r \pmod{10}$
avec $0 \leq r < 10$. On va d'abord chercher le plus petit $d \in \mathbb{N}^*$ tel que : $7^d \equiv \pm 1 \pmod{10}$.

$$7 \equiv 7 \pmod{10}$$

$$7^2 = 49 \equiv 9 \equiv 9 - 1 \times 10 \equiv -1 \pmod{10}$$

$$\text{On a : } 7^{2026} = 7^{2 \times 1013} = (7^2)^{1013} \equiv (-1)^{1013} \equiv -1 \equiv -1 + 1 \times 10 \equiv 9 \pmod{10}.$$

Résumons : $7^{2026} \equiv 9 \pmod{10}$ avec $0 \leq 9 < 10$ donc le chiffre des unités de 7^{2026} est 9.

Exercice 4

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on pose : $a_n = 2n^2 + 14n + 21$ et $b_n = 3n^2 + 15n + 9$.

1. Déterminer a_0 et b_0 , justifier que : $a_0 \equiv b_0 \pmod{4}$.

$$a_0 = 2(0)^2 + 14(0) + 21 = 21 \text{ et } b_0 = 3(0)^2 + 15(0) + 9 = 9$$

$$a_0 - b_0 = 21 - 9 = 12 = 4 \times 3 \text{ donc } 4|a_0 - b_0, \text{ autrement dit : } a_0 \equiv b_0 \pmod{4}.$$

2. a. Déterminer a_{10} puis le quotient et le reste de a_{10} par 14.

$$a_{10} = 2(10)^2 + 14(10) + 21 = 200 + 140 + 21 = 361$$

$361 = 25 \times 14 + 11$ avec $0 \leq 11 < 14$ donc pour la division euclidienne de a_{10} par 14 : le **quotient est 25** et le **reste 11**.

b. Déterminer b_{10} puis le quotient et le reste de b_{10} par 14.

$$b_{10} = 3(10)^2 + 15(10) + 9 = 300 + 150 + 9 = 459$$

$459 = 32 \times 14 + 11$ avec $0 \leq 11 < 14$ donc pour la division euclidienne de b_{10} par 14 : le **quotient est 32** et le **reste 11**.

A-t-on $a_{10} \equiv b_{10} [14]$?

Pour la division euclidienne par 14, a_{10} et b_{10} ont même reste donc $a_{10} \equiv b_{10} [14]$.

3. Montrer que, pour tout entier naturel n , on a : $a_n \equiv b_n [n + 4]$.

Soit $n \in \mathbb{N}$, on a :

$$\begin{aligned} a_n - b_n &= 2n^2 + 14n + 21 - (3n^2 + 15n + 9) = 2n^2 + 14n + 21 - 3n^2 - 15n - 9 \\ &= -n^2 - n + 12 = -n^2 - 4n + 3n + 12 = (-n + 3)(n + 4) \end{aligned}$$

On a : $a_n - b_n = (-n + 3)(n + 4)$, donc il existe $k \in \mathbb{Z}$ tel que $a_n - b_n = k(n + 4)$, à savoir $k = -n + 3$, donc $n + 4 \mid a_n - b_n$ et comme $n + 4 > 0$ on en déduit :

$$a_n \equiv b_n [n + 4].$$

On a donc bien, pour tout entier naturel n : $a_n \equiv b_n [n + 4]$.

BONUS

sandwich : 4,2 €, plat chaud avec viande : 16,1 €

facture totale 984,4 €

« Ma fille, tu as fait une erreur quelque part ! », expliquer ...

Supposons que la facture proposée est sans erreur, notons $x \in \mathbb{N}$ le nombre de sandwiches et $y \in \mathbb{N}$ le nombre de plats chauds avec viande correspondants.

Les x sandwiches coûtent $4,2x$ €, les y plats chauds avec viande coûtent $16,1y$ € donc la facture totale est : $4,2x + 16,1y$.

Or, la facture totale est de 984,4 €, donc : $4,2x + 16,1y = 9\,844$.

En multipliant chaque membre par 10 : $42x + 161y = 9\,844$.

Remarquons que : $161 = 7 \times 23$ donc $7 \mid 161$.

On a : $7 \mid 42$ et $7 \mid 161$ donc 7 divise toute combinaison linéaire de 42 et 161, en particulier $7 \mid 42x + 161y$, c'est-à-dire : $7 \mid 9\,844$ (*).

Or, en posant la division euclidienne de 9 844 par 7, on obtient : $9\,844 = 1406 \times 7 + 2$ avec $0 \leq 2 < 7$: le reste est non nul, donc 9 844 n'est pas divisible par 7, ce qui est en contradiction avec (*), donc il faut rejeter la supposition « la facture est sans erreur », par conséquent **elle contient avec certitude une erreur**.