

TROISIEME FICHE – Fonction linéaire, fonction affine

■ Fonctions linéaires

Exemple n°1

Le programme de calcul « multiplier par 5 » est une fonction linéaire de coefficient 5.

L'écriture littérale de cette fonction linéaire f est : $f(x) = 5x$.

Exemple n°2

La fonction g « multiplier par $-\frac{3}{7}$ » est une fonction linéaire de coefficient $-\frac{3}{7}$.

Elle admet pour écriture littérale : $g(x) = -\frac{3}{7}x$.

Cas général

Une fonction **linéaire** de coefficient a est définie par le programme de calcul :

« multiplier par le nombre a ».

Définition

Une fonction f est **linéaire** si et seulement il existe un nombre a tels que l'on puisse écrire : $f(x) = ax$.

Propriété

Le tableau de valeurs d'une fonction **linéaire** est un tableau de **proportionnalité**.

Conséquence : la représentation graphique d'une fonction **linéaire** est **une droite qui passe par l'origine du repère**.

● *N'importe quelle droite non confondue avec l'axe des ordonnées et passant par l'origine du repère peut être considérée comme la représentation graphique d'une certaine fonction linéaire.*

● *Dès qu'il y a proportionnalité, il y a présence d'une fonction linéaire.*

■ Pourcentages

Exemple n°1

La consommation d'eau annuelle de M. Dupont a augmenté de 5%.

Elle était de 60 m^3 l'année dernière. De combien sera-t-elle cette année ?

Pour une augmentation de 5%, le coefficient multiplicatif est :

$$1 + \frac{5}{100} = 1,05$$

On a : $1,05 \times 60 \text{ m}^3 = 63 \text{ m}^3$, donc cette année la consommation d'eau de M. Dupont sera de 63 m^3 .

Exemple n°2

Pendant les soldes, une remise de 30% est accordée sur le prix d'un disque dur externe coûtant habituellement 45€. Quel sera le prix de vente de ce disque dur après remise ?

Pour une diminution de 30%, le coefficient multiplicatif est :

$$1 - \frac{30}{100} = 1 - 0,3 = 0,7$$

On a : $0,7 \times 45\text{€} = 31,5\text{€}$, donc le prix de vente de ce disque dur après remise sera de 31,5€.

A retenir

Lorsque quelque chose subit une **augmentation** de $t\%$, on passe de la valeur initiale à la valeur finale en multipliant par :

$$1 + \frac{t}{100}$$

Lorsque quelque chose subit une **diminution** de $t\%$, on passe de la valeur initiale à la valeur finale en multipliant par :

$$1 - \frac{t}{100}$$

■ Fonction affine

Exemple n°1

La fonction f définie par la suite d'opérations : multiplier par 3 puis ajouter 7 est une fonction affine de coefficients $a = 3$ et $b = 7$.

L'écriture littérale de cette fonction affine f est $f(x) = 3x + 7$.

Exemple n°2

La fonction g définie par $g(x) = 8,5x - 3$ est une fonction affine de coefficients $a = 8,5$ et $b = -3$.

Définition

Une fonction f est **affine** si et seulement il existe deux nombres a et b tels que l'on puisse écrire $f(x) = ax + b$.

- Une fonction linéaire est une fonction affine telle que $b = 0$.

■ Représentation graphique d'une fonction affine

Exemple

La représentation graphique de la fonction f définie par $f(x) = 0,5x + 4$ est une droite de coefficient directeur **0,5** et d'ordonnée à l'origine **4**.

Cas général

La représentation graphique de la fonction affine f d'écriture littérale $f(x) = ax + b$ est une droite qui coupe l'axe des ordonnées à la valeur b .

On dit que le nombre a est le **coefficient directeur** de cette droite, et que le nombre b est **l'ordonnée à l'origine** de cette droite.

- On obtient des points de la droite représentative d'une fonction affine à partir d'un tableau de valeurs.

■ Calcul du coefficient a d'une fonction linéaire, d'une fonction affine

Exemple n°1

Soit $f: x \mapsto ax + b$ telle que : $f(5) = 13$ et $f(9) = 21$. Donner l'écriture littérale $f(x)$.

On a :

$$a = \frac{f(9) - f(5)}{9 - 5} = \frac{21 - 13}{9 - 5} = \frac{8}{4} = 2$$

et donc on peut écrire : $f(x) = 2x + b$.

Pour $x = 5$, on obtient : $f(5) = 2(5) + b$, c'est-à-dire : $f(5) = 10 + b$.

En remplaçant $f(5)$ par sa valeur 13, on obtient :

$$\begin{aligned} 13 &= 10 + b \\ 13 - 10 &= 10 + b - 10 \\ 3 &= b \end{aligned}$$

Finalement : $f(x) = 2x + 3$.

Exemple n°2

Soit $f: x \mapsto ax$ la fonction linéaire telle que : $f(4) = 12$. Donner l'écriture littérale $f(x)$.

Méthode n°1

On a $f(x) = ax$, donc pour $x = 4$, on obtient : $f(4) = a(4)$, ou encore : $f(4) = 4a$.

En remplaçant $f(4)$ par sa valeur 12, on obtient :

$$\begin{aligned} 12 &= 4a \\ \frac{12}{4} &= \frac{4a}{4} \\ 3 &= a \end{aligned}$$

Finalement : $f(x) = 3x$.

Méthode n°2

Comme f est une fonction linéaire, on peut affirmer que $f(0) = 0$, et la formule du coefficient a s'écrit :

$$a = \frac{f(4) - f(0)}{4 - 0} = \frac{12 - 0}{4 - 0} = \frac{12}{4} = 3$$

Finalement : $f(x) = 3x$.

Formule à retenir

Soit $f: x \mapsto ax + b$ une fonction affine.

Alors pour n'importe quels nombres distincts x_1 et x_2 , on a :

$$a = \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1}$$

- Il résulte de cette formule que **si le quotient**

$$\frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1}$$

change de valeur suivant le choix des nombres x_1 et x_2 , **alors f n'est pas une fonction affine.**